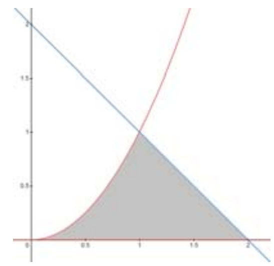
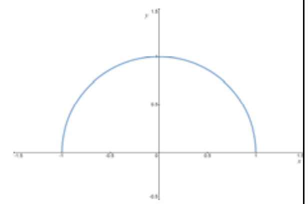
# ĐÁP ÁN ĐỀ THI TOÁN CAO CẤP A3

**Mã môn học: MATH130301 Ngày thi: 05/06/2019**

<table>
<tr><th colspan="2">Câu</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th><th>Tổng</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">a.</td><td>Dễ thấy, giao điểm của các đường là tại các điểm (0,0), (1,1) và (2,0) và D là miền được tô như hình vẽ.<br><br>Cách 1. Từ hình vẽ này ta có $D:\begin{cases}0\le y\le 1\\ \sqrt{y}\le x\le 2-y\end{cases}$.<br>Cách 2. Tách miền D thành hai miền:<br>- miền $D_1$ là phần miền D ứng với hoành độ thuộc $[0,1]$.<br>- miền $D_2$ là phần miền D ứng với hoành độ thuộc $[1,2]$.<br>Khi đó ta có<br>$$D_1:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x^2\end{cases} \text{ và } D_2:\begin{cases}1\le x\le 2\\ 0\le y\le 2-x\end{cases}.$$</td><td>0.5</td><td rowspan="3">1.5</td></tr>
<tr><td>Từ các cách biểu diễn miền D như trên, ta có các cách tính tích phân:<br>Cách 1. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$<br>Cách 2. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>Từ biểu diễn trên, diện tích miền D được tính như sau:<br>$S_D=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} dx=\int\limits_0^1\left(2-y-\sqrt{y}\right)dy=\left(2y-\frac{1}{2}y^2-\frac{2}{3}\sqrt{y^3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{5}{6}.$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">b.</td><td>Các mặt cong có giao tuyến là $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1\end{cases}$ và V là phần không gian nằm phía trên mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ và phía dưới mặt cầu $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$.<br>Trong hệ tọa độ Descartes:<br>$$V:\begin{cases}-1\le x\le 1\\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}\end{cases} \text{ và}$$<br>$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz.$$</td><td>0.5</td><td rowspan="2">1.5</td></tr>
<tr><td></td><td>Trong hệ tọa độ trụ $V:\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le r\le 1\\ r\le z\le\sqrt{2-r^2}\end{cases}$ và<br>$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 dr\int\limits_r^{\sqrt{2-r^2}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)rdz.$$</td><td>0.5</td></tr>
</table>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Trong hệ tọa độ cầu $V:\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\theta\le\pi/4\\ 0\le r\le\sqrt{2}\end{cases}$ và<br>$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/4}d\theta\int\limits_0^{\sqrt{2}}f\left(r\cos\varphi\sin\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\theta\right)r^2\sin\theta dz.$ | 0.5 | |
| | c. | Gọi $C'$ là đường cong kín hợp bởi $C$ và đoạn thẳng $BA$ (chiều đi từ $B$ tới $A$). Khi đó ta có công thức hình thức<br>$I=\int\limits_C Pdx+Qdy=\int\limits_{C'}Pdx+Qdy-\int\limits_{BA}Pdx+Qdy=I_1-I_2.$<br><br>Vì $BA$ có phương trình là $y=0,x:-1\to 1$, nên<br>$I_2=\int\limits_{BA}(x-y)dx+(y+2019x)dy=\int\limits_{-1}^{1}(x-0)dx=0.$ | 0.5 | 1.0 |
| | | Gọi $D$ là miền phẳng giới hạn bởi $C'$, theo định lý Green ta có<br>$I_1=\int\limits_{C'}(x-y)dx+(y+2019x)dy$<br>$=\iint\limits_D\left(Q_x'-P_y'\right)dxdy=\iint\limits_D\left(2019-(-1)\right)dxdy=$<br>$2020\iint\limits_D dxdy=2020S_D=2020\times\frac{1}{2}\pi(1)^2=1010\pi.$<br>Vậy $I=1010\pi.$<br><br>*Cách khác.* Đường cong $C$ đã cho có phương trình tham số $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases},t:0\to\pi$.<br>Thay vào tích phân đã cho ta có<br>$I_1=\int\limits_{C'}(x-y)dx+(y+2019x)dy$<br>$=\int\limits_0^{\pi}\left[(\cos t-\sin t)(-\sin t)+(\sin t+2019\cos t)\cos t\right]dt$<br>$=\int\limits_0^{\pi}\left(\sin^2t+2019\cos^2t\right)dt=\int\limits_0^{\pi}\left(1+2018\cos^2t\right)dt$<br>$=\int\limits_0^{\pi}\left(1010+1009\cos(2t)\right)dt=1010\pi.$ | 0.5 | |
| | d. | Cung $L$ có phương trình $y=x^2+1,0\le x\le 2,$ do đó $dl=\sqrt{1+(2x)^2}dx$ và<br>$I=\int\limits_L\left(y-x^2+8x-1\right)dl=\int\limits_0^2\left(x^2+1-x^2+8x-1\right)\sqrt{1+4x^2}dx=\int\limits_0^2 8x\sqrt{1+4x^2}dx$ | 0.5 | 1.0 |
| | | $=\int\limits_0^2\left(1+4x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(4x^2\right)=\frac{2}{3}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big\|_0^2=\frac{34\sqrt{17}}{3}-\frac{2}{3}.$ | 0.5 | |
| **2** | **a.** | $\vec{F}=xy^2\vec{\mathbf{i}}+yz^2\vec{\mathbf{j}}+zx^2\vec{\mathbf{k}}$ | **0.5** | **2.5** |

<table>
<tr>
<td rowspan="5"></td>
<td rowspan="2"></td>
<td>$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy^2 & yz^2 & zx^2\end{vmatrix}=(0-2yz)\vec{\mathbf{i}}+(0-2xz)\vec{\mathbf{j}}+(0-2xy)\vec{\mathbf{k}}$$<br>$$=-2yz\vec{\mathbf{i}}-2xz\vec{\mathbf{j}}-2xy\vec{\mathbf{k}}$$</td>
<td></td>
<td rowspan="5"></td>
</tr>
<tr>
<td>$$\text{div}\,\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=x^2+y^2+z^2$$</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">b.</td>
<td>Gọi $S'$ là đĩa tròn có tâm là gốc tọa độ bán kính bằng 2 nằm trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ hướng lên trên, và $S''=S\cup S'$, $V$ là phần không gian giới hạn bởi mặt cong $S''$. Trước hết ta có<br>$$\Phi_S(\vec{F})=\iint_S Pdxdy+Qdxdz+Rdydz$$<br>$$=\oiint_{S''} Pdxdy+Qdxdz+Rdydz-\iint_{S'} Pdxdy+Qdxdz+Rdydz$$<br>$$=I_1-I_2$$</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td>Khi đó $S''$ là mặt kín, trơn từng mảnh, có định hướng là phía trong, do đó theo định lý Gauss-Ostrogradsky ta có<br>$$I_1=-\iiint_V \text{div}\,\vec{F}\;dxdydz=-\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz.$$<br>Đổi biến sang hệ tọa độ cầu $x=r\cos\varphi\sin\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\theta$,<br>$$I_1=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/4}d\theta\int_0^2 r^2(r^2\sin\theta)d\varphi=-\frac{64\pi}{5}.$$</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td>Mặt $S'$ có phương trình là $z=0, x^2+y^2\le 4$, hướng lên trên theo Oz, do đó<br>$$I_2=\iint_{S'} Pdxdy+Qdxdz+Rdydz=\iint_{S'} Pdxdy$$<br>$$=\iint_{S'} xy^2dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 4} xy^2dxdy=0.$$<br>(do $P=xy^2$ là hàm lẻ đối với biến $x$ và đĩa tròn $S'$ là một miền đối xứng đối với $x$).<br>Vậy thông lượng của trường $\vec{F}$ trên $S$ là<br>$$\Phi=I_1-I_2=-\frac{64\pi}{5}.$$</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">3</td>
<td rowspan="2">a.</td>
<td>Giải phương trình $(e^xy-y^2)dx+(e^x-2xy+2)dy=0$.<br>Đặt $P=e^xy-y^2, Q=e^x-2xy+2$ ta có $Q'_x=e^x-2y=P'_y$ nên đây là phương trình vi phân toàn phần, nghĩa là tồn tại hàm $u(x,y)$ sao cho $du=Pdx+Qdy$ và khi đó nghiệm của phương trình đã cho là $u(x,y)=C$.</td>
<td>0.5</td>
<td rowspan="3">2.5</td>
</tr>
<tr>
<td>Để tìm $u(x,y)$ ta giải hệ phương trình<br>$$\begin{cases}u'_x=P=e^xy-y^2\\ u'_y=Q=e^x-2xy+2\end{cases}.$$<br>Dễ thấy một nghiệm của hệ là $u(x,y)=e^xy-xy^2+2x$, và nghiệm của phương trình là $e^xy-xy^2+2x=C$.</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td>b.</td>
<td>Giải phương trình thuần nhất $y''+y'=0$: Phương trình đặc trưng là</td>
<td>0.5</td>
</tr>
</table>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $k^2 + k = 0$ có nghiệm là 0 và $-1$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình này là $\overline{y} = C_1 + C_2 e^{-x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. | | |
| | | Tìm nghiệm riêng của phương trình $y'' + y' = e^{-x}$:<br>Do $\lambda = -1$ là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên một nghiệm riêng của phương trình này có dạng $y_{r_1} = axe^{-x}$. Thay vào giải ra ta được $a = -1$, do đó nghiệm riêng tìm được là $y_{r_1} = -xe^{-x}$. | **0.5** | |
| | | Tìm nghiệm riêng của phương trình $y'' + y' = 2\cos x$: Do $\pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên một nghiệm riêng của phương trình này có dạng $y_{r_2} = b\sin x + c\cos x$. Thay vào giải ra ta được $b = 1, c = -1$, do đó một nghiệm riêng của phương trình này là $y_{r_2} = \sin x - \cos x$.<br>Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = \overline{y} + y_{r_1} + y_{r_2} = C_1 + C_2 e^{-x} - xe^{-x} + \sin x - \cos x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. | **0.5** | |
| | | | **Tổng điểm** | **10.0** |